Elemi függvények, függvénytranszformációk

Összeállította: dr. Leitold Adrien
egyetemi docens

Függvénytani alapfogalmak

- Függvény: két halmaz elemei közötti egyértelmű hozzárendelés. Jel.: $f\colon A \to B$

  Elnevezések:

  Értelmezési tartomány: A , Jel.: D_f

  Képhalmaz: B

  Értékkészlet: B azon elemei, amelyeket f hozzárendel az A elemeihez. Jel.: R_f

- Függvények jellemzése: (valós-valós függvényekre)

Zérushely: az értelmezési tartomány olyan x_0 eleme, melyre $f(x_0) = 0$ (a függvény grafikonja ebben a pontban metszi vagy érinti az x tengelyt).

Szélsőérték: maximum vagy minimum, mindkettő lehet abszolút (globális) szélsőérték, vagy lokális szélsőérték.

Függvénytani alapfogalmak (folyt.)

Monotonitás: Egy f függvény egy intervallumon monoton növekvő, ha az intervallumon értelmezve van, és ha az intervallumbeli x_1 és x_2 pontokra $x_1 < x_2$ teljesül, akkor $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Hasonlóan értelmezhető:

- egy intervallumon monoton csökkenő
- egy intervallumon szigorúan monoton növekvő
- egy intervallumon szigorúan monoton csökkenő függvény.

Megjegyzés: az intervallum lehet az egész értelmezési tartomány is.

Periodicitás: Egy f függvény periodikus, ha van olyan $c > 0$ szám, melyre teljesül, hogy ha $x \in D_f$, akkor $x \pm c \in D_f$ is teljesül és $f(x \pm c) = f(x)$. Az ilyen tulajdonságú c számok közül a legkisebbet – ha létezik – az f függvény periódusának hívjuk.

Függvénytani alapfogalmak (folyt.)

Paritás: paritás szempontjából a függvények háromfélék lehetnek:

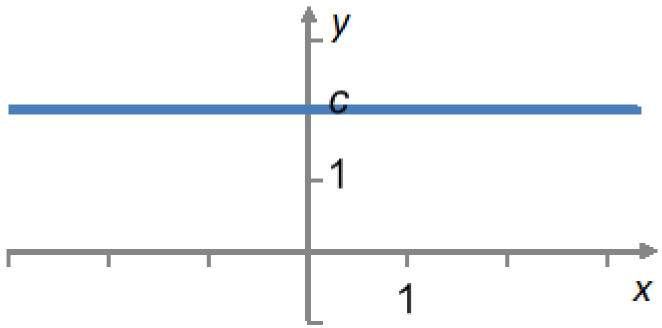
- páros
- páratlan
- se nem páros, se nem páratlan.

Az f függvény páros, ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ is teljesül és $f(-x) = f(x)$. A páros függvények grafikonja szimmetrikus az y tengely-re.

Az f függvény páratlan, ha $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ is teljesül és $f(-x) = -f(x)$. A páratlan függvények grafikonja szimmetrikus az origóra.

Konstans függvény

$$f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad x \mapsto c \qquad \text{vagy} \qquad f(x) = \mathrm{c}, \;\; x \in \mathrm{R}$$



$D_f = \mathbf{R}, \qquad R_f = \{c\}$

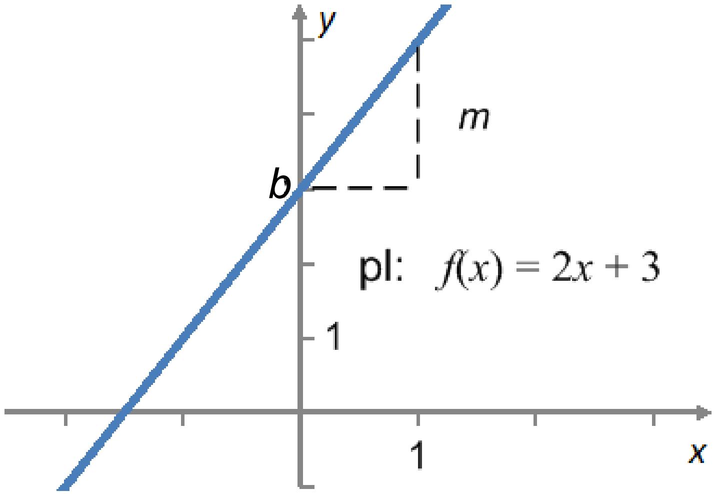
grafikonja az x tengellyel párhuzamos egyenes

zérushely:

- ha $c = 0$, akkor $\forall x \in \mathbf{R}$
- ha $c \neq 0$, akkor nincs

Elsőfokú függvény

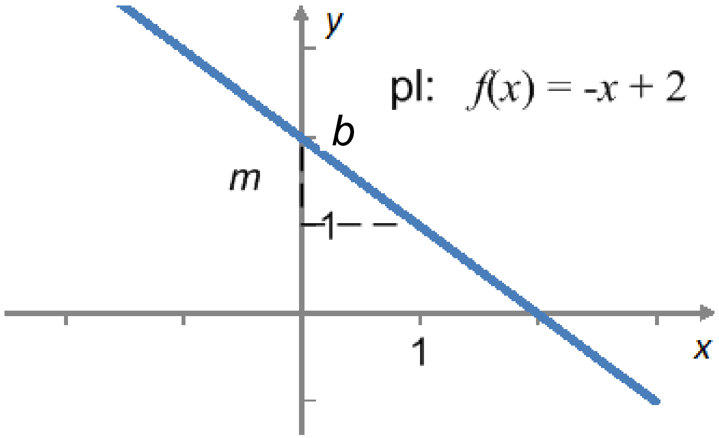
$f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad x \mapsto m \cdot x + b$ vagy $f(x) = m \cdot x + b, \; x \in \mathrm{R}, \quad (m \neq 0)$



$D_f = \mathbf{R}, \qquad R_f = \mathbf{R}$

grafikonja egyenes, amely az y tengelyt b-nél metszi és meredeksége m

zérushely: $x = -b/m$

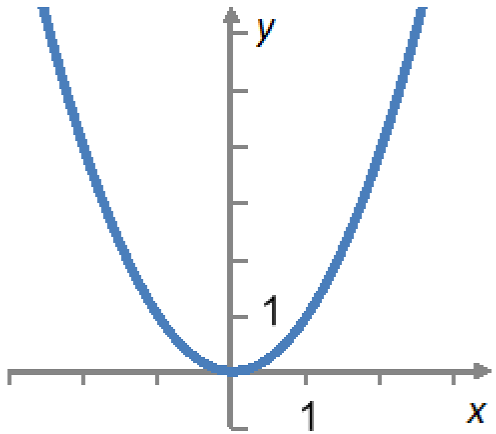


monotonitás:

- ha $m>0$: szig. mon. növekedő **R**-en,
- ha $m<0$: szig. mon. csökkenő **R**-en.

Másodfokú függvény

$$f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad x \mapsto x^2 \qquad \text{vagy} \qquad f(x) = x^2, \; x \in \mathrm{R}$$



$D_f = \mathbf{R}$, $\qquad R_f = [0, \infty)$,

grafikonja normálparabola

zérushely: $x=0$

monotonitás:

- $(-\infty, 0]$-en szig. mon. csökken,
- $[0, \infty)$-en szig. mon. nő.

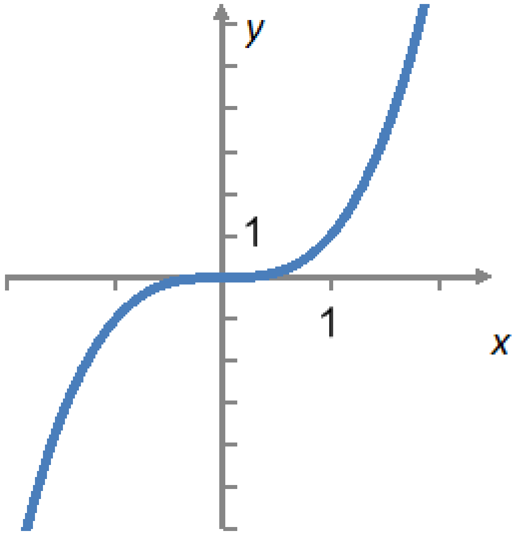
abszolút minimum:

- helye: $x=0$
- értéke: $y=f(0)=0$

páros függvény

Harmadfokú függvény

$$f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad x \mapsto x^3 \qquad \text{vagy} \qquad f(x) = x^3\,,\ x \in \mathrm{R}$$



$D_f = \mathbf{R}$, $\quad R_f = \mathbf{R}$

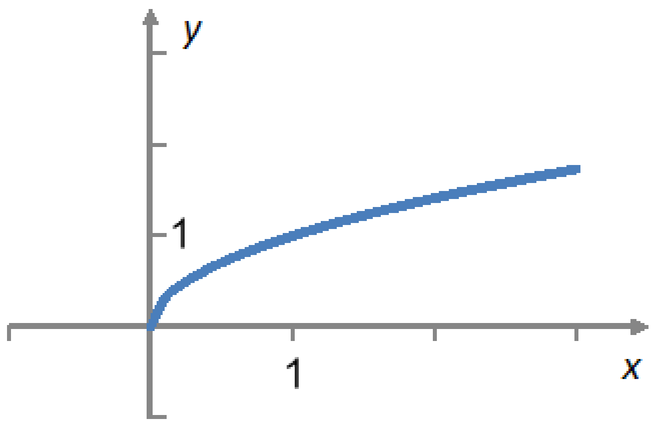
zérushely: $x=0$

monotonitás:
szig. mon. nő $\mathbf{R}$-en

páratlan függvény

Gyökfüggvény

$$f : \mathrm{R}_0^+ \to \mathrm{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x} \qquad \text{vagy} \qquad f(x) = \sqrt{x}\,, \;\; x \geq 0$$



$D_f = [0, \infty)$, $\quad R_f = [0, \infty)$,

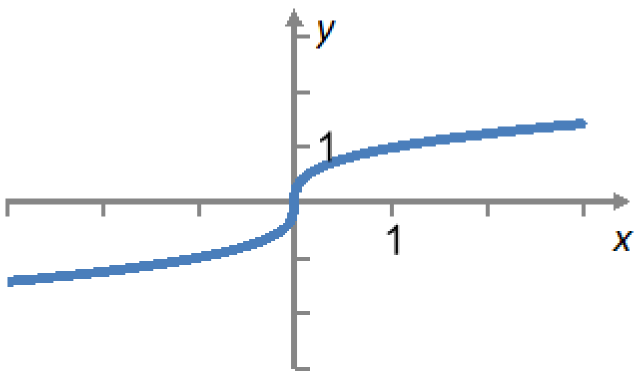
zérushely: $x=0$

monotonitás:
szig. mon. nő $[0, \infty)$ -en

abszolút minimum:
- helye: $x=0$
- értéke: $y=f(0)=0$

Köbgyök-függvény

$f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad x \mapsto \sqrt[3]{x}$ vagy $f(x) = \sqrt[3]{x}\,,\ x \in \mathrm{R}$



$D_f = \mathbf{R}, \qquad R_f = \mathbf{R}$

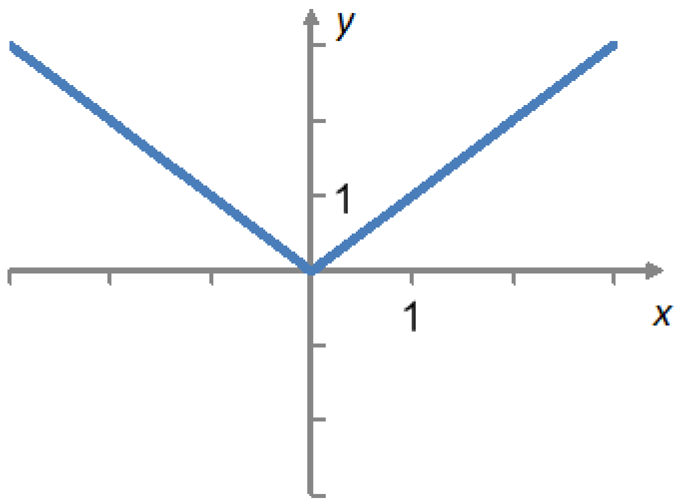
zérushely: $x=0$

monotonitás:
szig. mon. nő **R**-en

páratlan függvény

Abszolútérték-függvény

$$f:\mathrm{R}\to\mathrm{R},\quad x\mapsto|x| \qquad \text{vagy} \qquad f(x)=|x|,\ x\in\mathrm{R}$$



$D_f = \mathbf{R}$, $\qquad R_f = [0, \infty)$,

zérushely: $x=0$

monotonitás:

- $(-\infty, 0]$-en szig. mon. csökken,
- $[0, \infty)$-en szig. mon. nő.

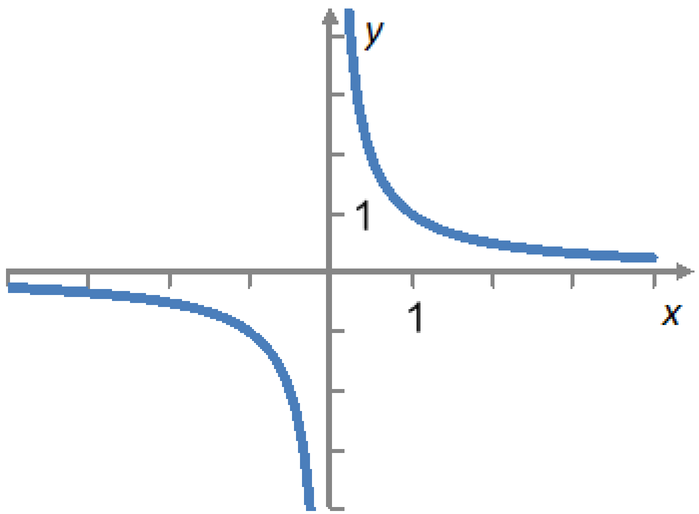
abszolút minimum:

- helye: $x=0$
- értéke: $y=f(0)=0$

páros függvény

Lineáris törtfüggvény

$$f : \mathrm{R} \setminus \{0\} \to \mathrm{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x} \quad \text{vagy} \quad f(x) = \frac{1}{x}, \; x \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$$



$D_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $R_f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$,

zérushely: *nincs*

monotonitás:

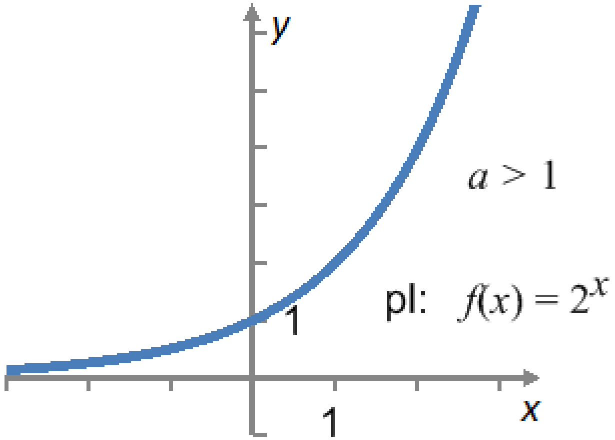
- $(-\infty, 0)$-n szig. mon. csökken,
- $(0, \infty)$-en szig. mon. csökken.

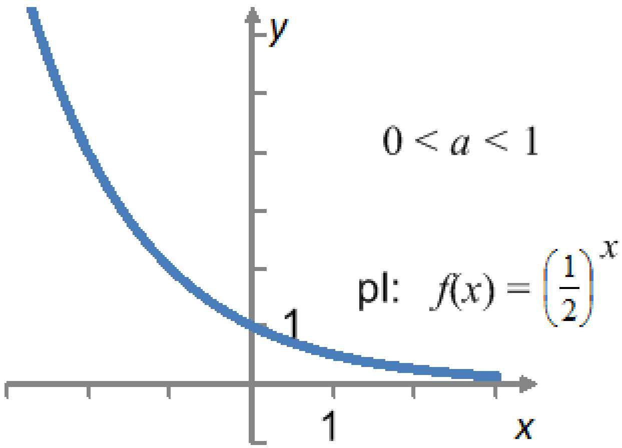
páratlan függvény

Exponenciális függvény

$$f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}, \quad x \mapsto a^x \quad \text{vagy} \quad f(x) = a^x, \; x \in \mathrm{R}$$

$$a > 0, \; a \neq 1$$





$D_f = \mathbf{R}$, $R_f = \mathbf{R}^+$,

zérushely: *nincs*

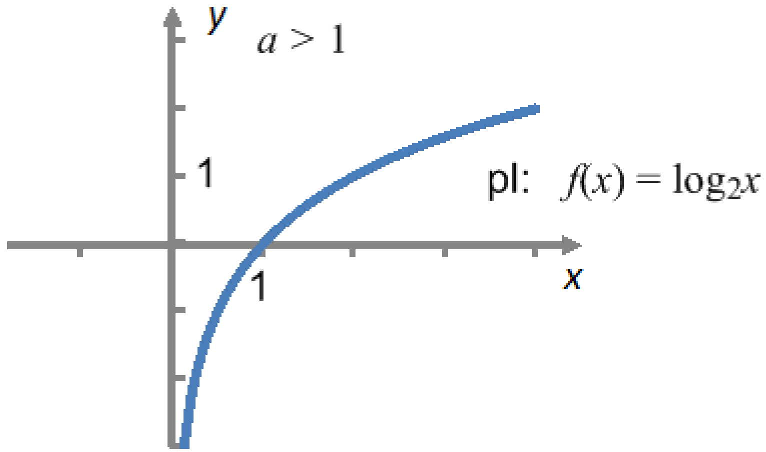
monotonitás:

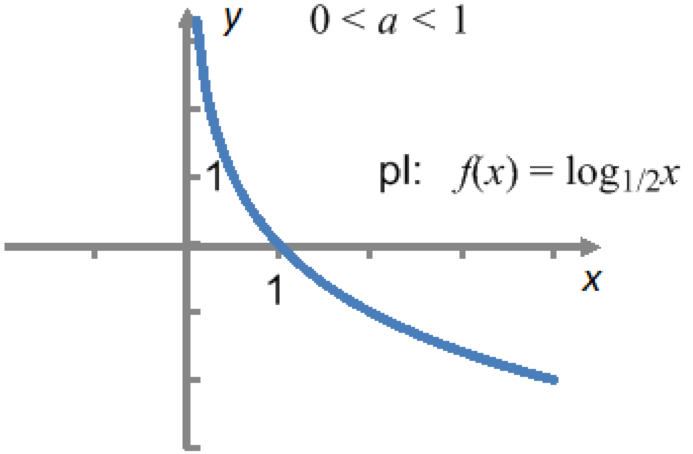
- ha $a>1$: szig. mon. nő,
- ha $0<a<1$: szig. mon. csökken.

Logaritmus függvény

$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a x$ vagy $f(x) = \log_a x,\ x \in \mathbb{R}^+$

$a > 0,\ a \neq 1$





$D_f = \mathbf{R}^+$, $R_f = \mathbf{R}$,

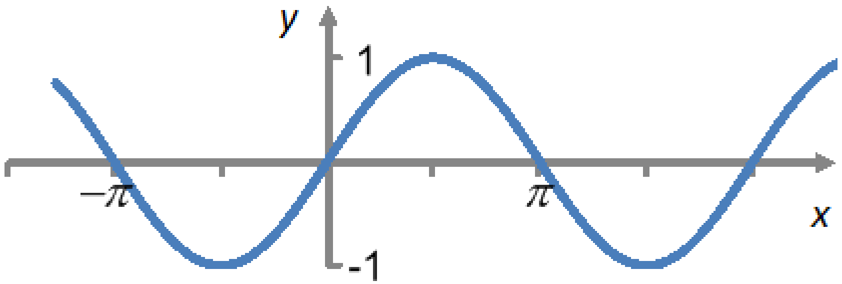
zérushely: $x=1$

monotonitás:

- ha $a>1$: szig. mon. nő,
- ha $0<a<1$: szig. mon. csökken.

Szinuszfüggvény

$$f(x) = \sin x, \; x \in \mathrm{R}$$



$D_f = \mathbf{R}$, $R_f = [-1, 1]$,

zérushely: $x = k \cdot \pi$, $k \in \mathbf{Z}$

monotonitás:

- $[\pi/2+2k\pi, 3\pi/2+2k\pi]$-n szig. mon. csökken,
- $[-\pi/2+2k\pi, \pi/2+2k\pi]$-n szig. mon. nő.

abszolút maximum:

- helye: $x = \pi/2+2k\pi$
- értéke: $y=1$

abszolút minimum:

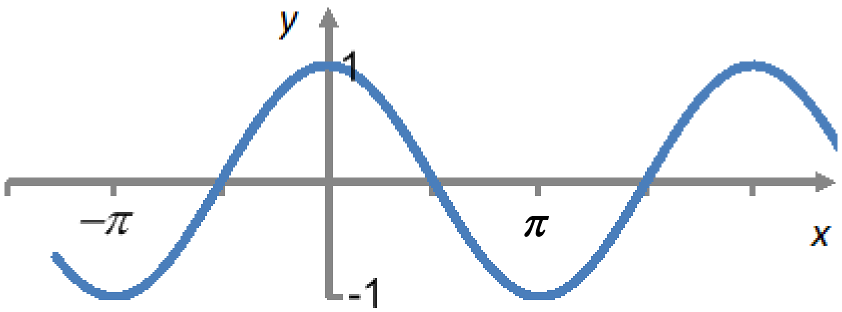
- helye: $x = 3\pi/2+2k\pi$
- értéke: $y=-1$

páratlan függvény

periodikus, periódusa: 2π

Koszinuszfüggvény

$$f(x) = \cos x\,,\ \ x \in \mathrm{R}$$



$D_f = \mathbf{R}$, $R_f = [-1, 1]$,

zérushely: $x = \pi/2 + k\cdot\pi$, $k \in \mathbf{Z}$

monotonitás:

- $[2k\pi, \pi+2k\pi]$-n szig. mon. csökken,
- $[\pi+2k\pi, 2\pi+2k\pi]$-n szig. mon. nő.

abszolút maximum:

- helye: $x = 2k\pi$
- értéke: $y=1$

abszolút minimum:

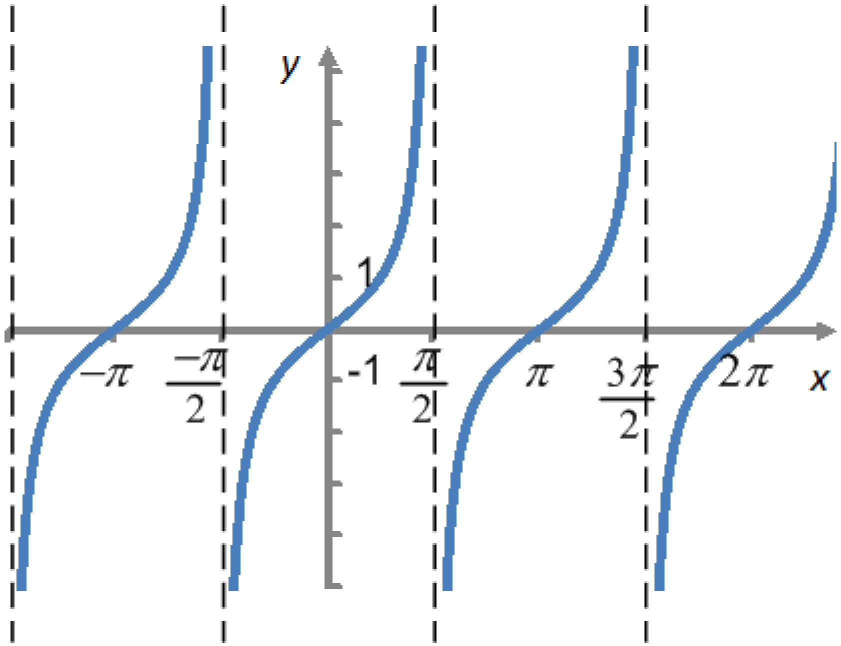
- helye: $x = \pi+2k\pi$
- értéke: $y=-1$

páros függvény

periodikus, periódusa: 2π

Tangensfüggvény

$$f(x) = \operatorname{tg} x\,,\;\; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\,, \quad k \in Z$$



$D_f = \mathbf{R} \setminus \{\pi/2 + k\cdot\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $\quad R_f = \mathbf{R}$,

zérushely: $\quad x = k\cdot\pi, \quad k \in \mathbf{Z}$

monotonitás:

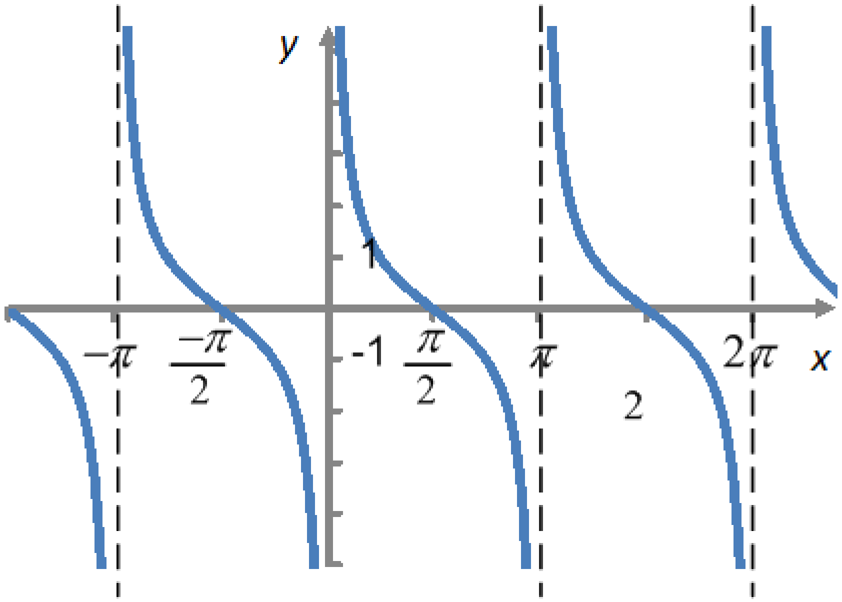
- ($-\pi/2+k\pi$, $\pi/2+k\pi$)-n szig. mon. nő.

páratlan függvény

periodikus, periódusa: π

Kotangensfüggvény

$$f(x) = \operatorname{ctg} x\,,\;\; x \neq k\pi\,, \quad k \in Z$$



$D_f = \mathbf{R} \setminus \{k\cdot\pi \mid k\in\mathbf{Z}\}$, $\quad R_f = \mathbf{R}$,

zérushely: $x=\pi/2+k\cdot\pi$, $\quad k\in\mathbf{Z}$

monotonitás:

- $(k\pi,\ \pi+k\pi)$-n szig. mon. csökken.

páratlan függvény

periodikus, periódusa: π

Függvénytranszformációk

- Változó transzformációk

$1.\ f(x) \Rightarrow f(x+c)$

$2.\ f(x) \Rightarrow f(-x)$

$3.\ f(x) \Rightarrow f(a \cdot x), \quad a>0$

$4.\ f(x) \Rightarrow f(|\, x\,|)$

- Függvényérték transzformációk

$1.\ f(x) \Rightarrow f(x)+c$

$2.\ f(x) \Rightarrow -f(x)$

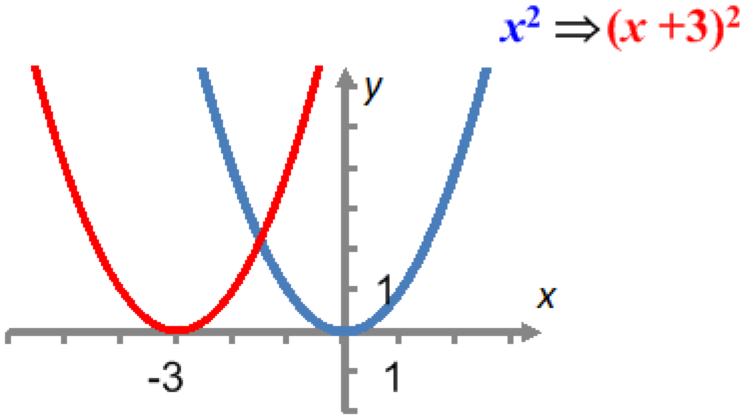
$3.\ f(x) \Rightarrow a \cdot f(x), \quad a>0$

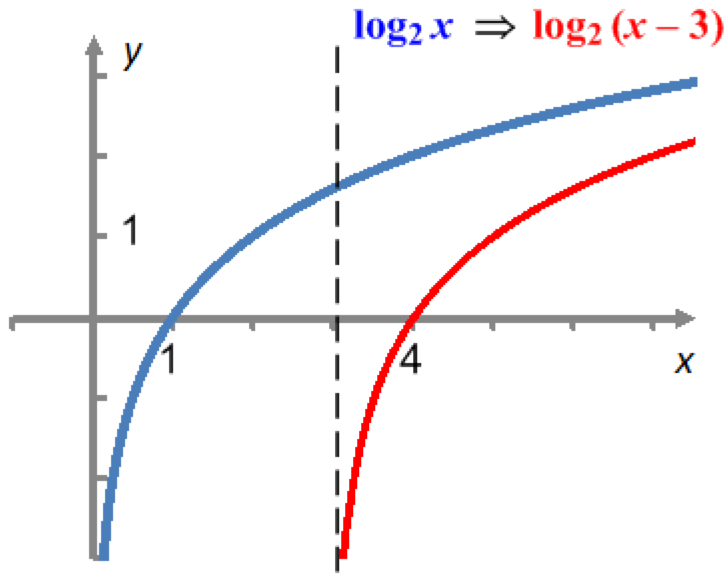
$4.\ f(x) \Rightarrow |\, f(x)\,|$

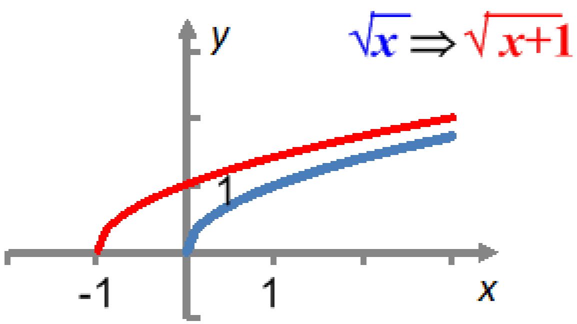
Változó transzformációk

1. $f(x) \Rightarrow f(x+c)$

A grafikon az x tengely mentén $-c$-vel eltolódik.



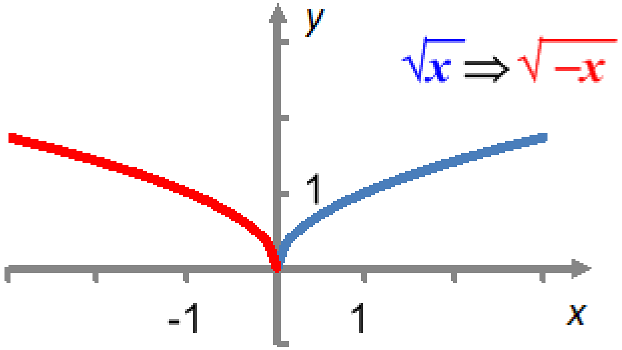


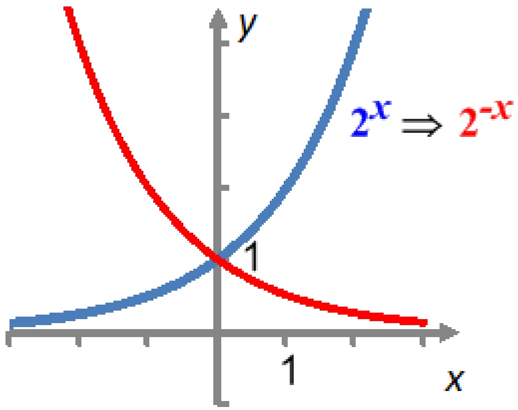


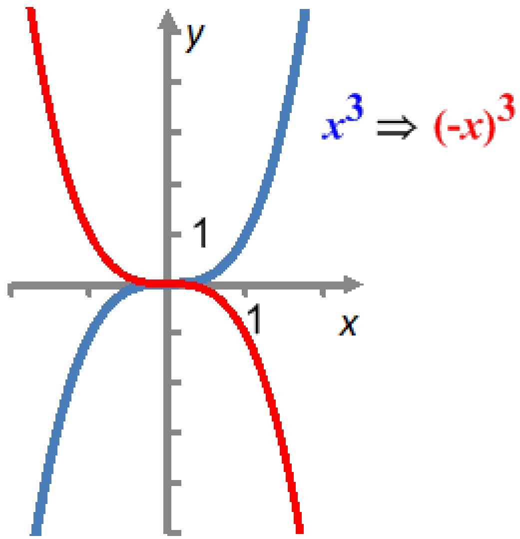
Változó transzformációk (folyt.)

2. $f(x) \Rightarrow f(-x)$

A grafikon az y tengelyre tükröződik.





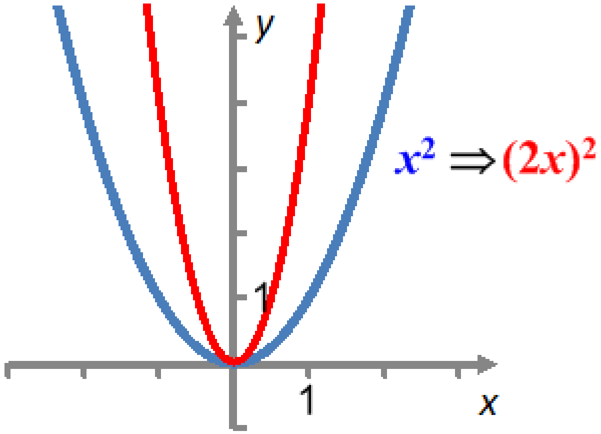


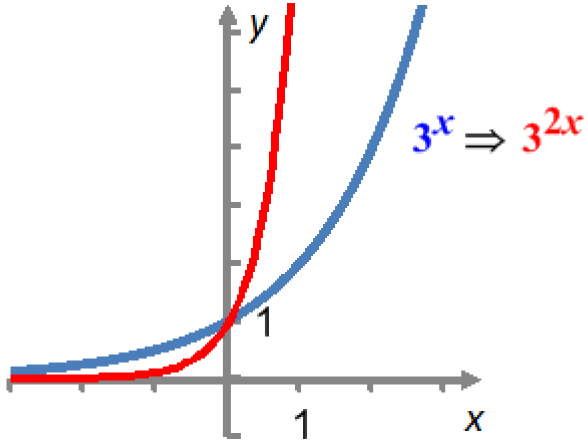
Változó transzformációk (folyt.)

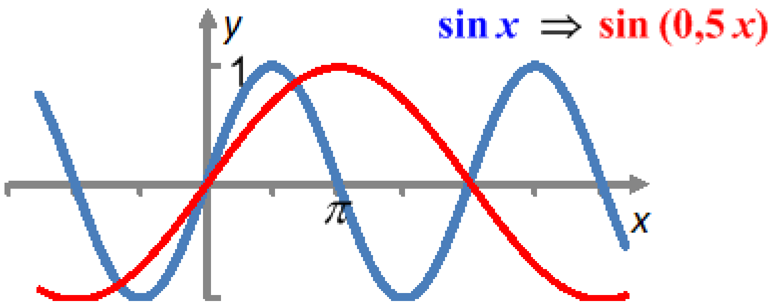
3. $f(x) \Rightarrow f(a \cdot x), \quad a > 0$

A grafikon az x tengely mentén $1/a$-szorosára változik:

- ha $0<a<1$, akkor nyúlik,
- ha $a>1$, akkor zsugorodik.



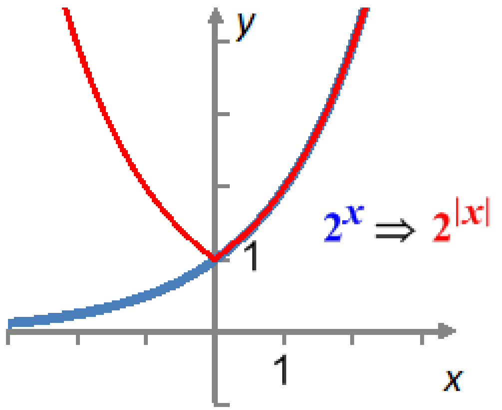


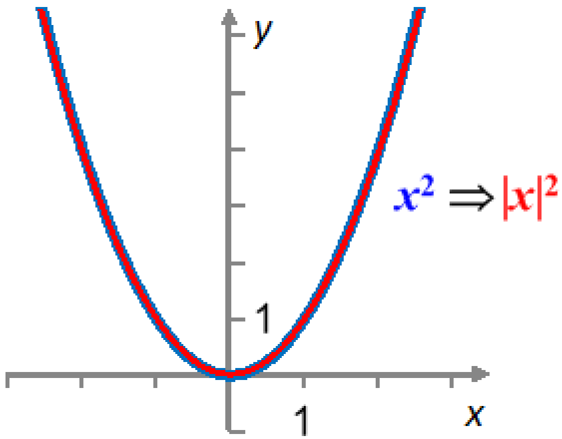


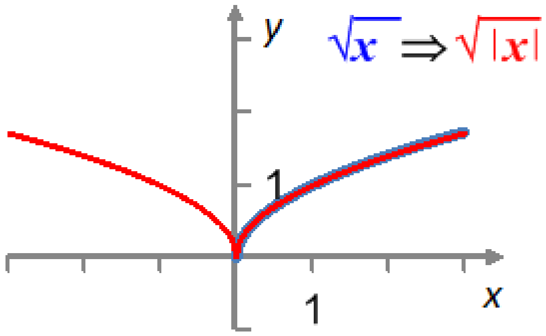
Változó transzformációk (folyt.)

4. $f(x) \Rightarrow f(|\,x\,|)$

A függvény grafikonjának y tengelytől balra eső részét elhagy-juk, az y tengelytől jobbra eső részt megőrizzük, és tükrözzük az y tengelyre.



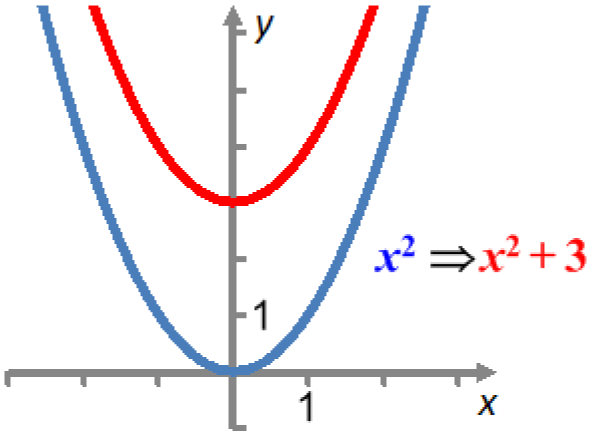


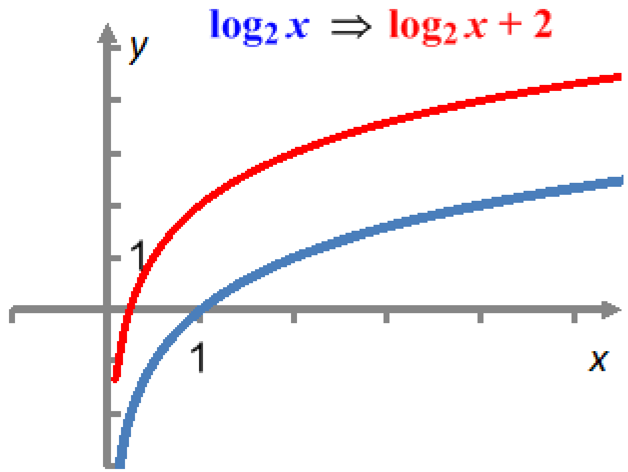


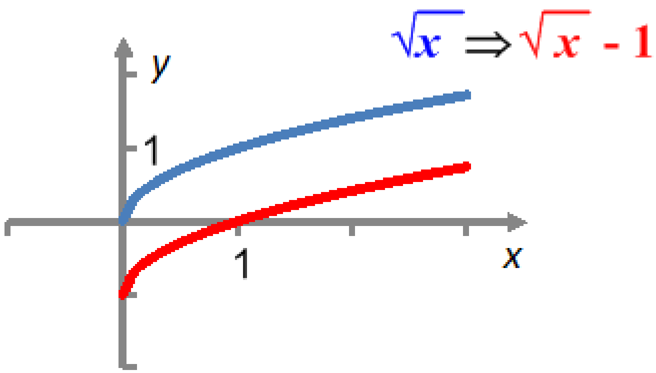
Függvényérték transzformációk

1. $f(x) \Rightarrow f(x)+c$

A grafikon az y tengely mentén c-vel eltolódik.



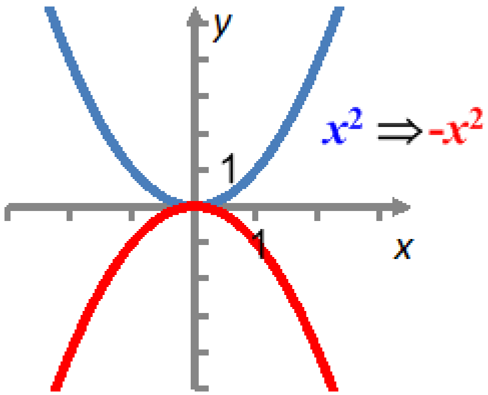


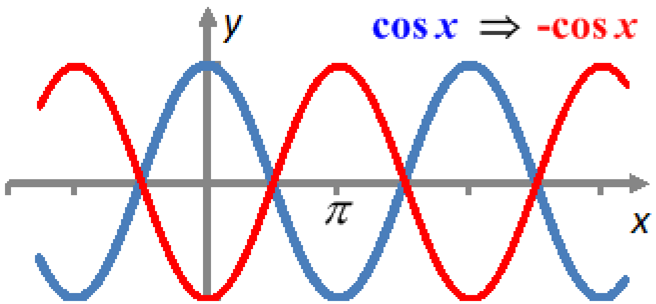


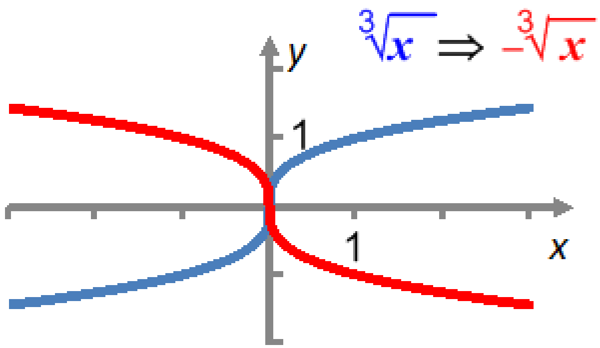
Függvényérték transzformációk (folyt.)

2. $f(x) \Rightarrow -f(x)$

A grafikon az x tengelyre tükröződik.





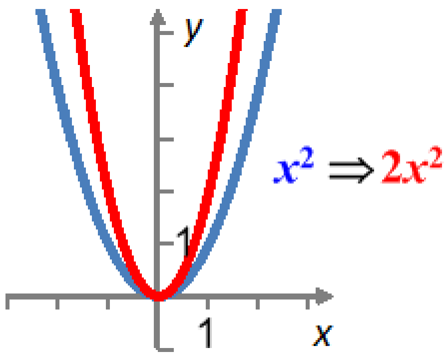


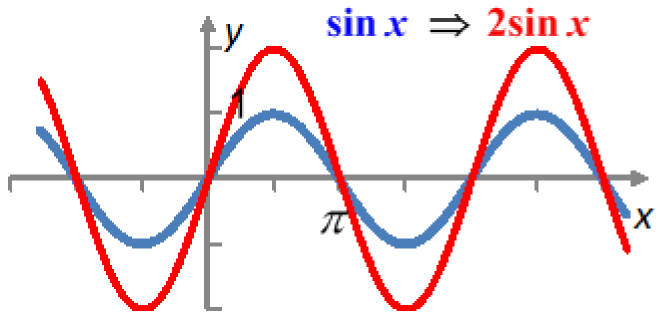
Függvényérték transzformációk (folyt.)

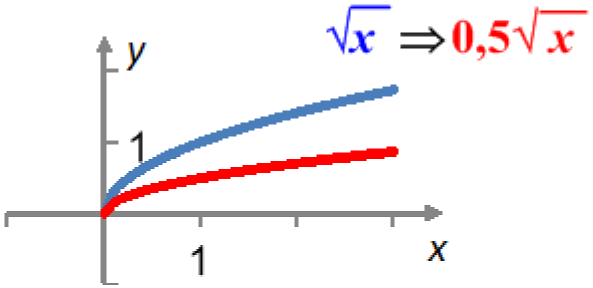
3. $f(x) \Rightarrow a \cdot f(x), \quad a>0$

A grafikon az y tengely mentén a-szorosára változik:

- ha $0<a<1$, akkor zsugorodik,
- ha $a>1$, akkor nyúlik.







Függvényérték transzformációk (folyt.)

4. $f(x) \Rightarrow |f(x)|$

A grafikon x tengely alatti része tükröződik az x tengelyre.